

Elementi di Geometria dal punto di vista superiore

A.A. 2015/16

Orario delle lezioni: martedì 14-15, mercoledì 9-11, giovedì 9-11, aula Enriques

Argomento delle lezioni

- 22/9/14 (1 ora 14-15 progr. 1). Presentazione del corso, mediante Power-Point: motivazioni per insegnare la Geometria, i contenuti del corso, la struttura del corso, i seminari, l'esame. Esempi di forme, simmetrie e traiettorie.
- 23/9 (2 ore, 9-11 progr. 3). I. - Le teorie deduttive come giochi con elementi primitivi e regole o postulati. Un gioco sulla parola "punto" e scelta di un possibile significato geometrico. Confutazione del punto inteso come unità mediante l'irrazionalità della radice di 2. La retta ed il piano; il circolo vizioso della definizione di segmento come parte di una retta e di retta come segmento prolungabile. La necessità di postulati per descrivere coerentemente questi tre tipi di oggetti. L'esempio del piano di Fano.
II. - Ripasso di nozioni di Algebra di base: coppie ordinate, prodotto cartesiano, relazioni fra insiemi, relazione trasposta, composizione di relazioni, le funzioni, la funzione inversa e la biiettività. Relazioni in un insieme, l'identità, relazioni d'equivalenza. La relazione d'equivalenza associata ad una funzione.
- 24/9 (2 ore, 9-11 progr. 5). I. - Riassunto sull'impostazione euclidea: il piano come insieme non vuoto, i punti come suoi elementi e le rette come sottoinsiemi particolari, da individuare mediante opportuni postulati. Simboli per gli enti geometrici; principali convenzioni per rappresentare le figure geometriche e necessità di esplicitarle agli allievi per evitare fraintendimenti e difficoltà legate ai cambi di registro. Il numero di punti del piano: equipotenza di ogni segmento con ogni retta (una semplice costruzione grafica). Il primo postulato e le sue conseguenze; l'esistenza possibile di rette parallele; il piano di Fano, senza parallele, l'assioma delle parallele nella formulazione di Playfair.
II. - Classi d'equivalenza e loro proprietà, insieme quoziente, partizioni. Relazioni d'equivalenza in Geometria: il parallelismo debole nell'insieme delle rette, fasci di parallele come punti impropri e l'insieme quoziente come retta impropria; il piano proiettivo come esempio di geometria non euclidea, senza parallele. Giocando a classificare i quadrilateri: trapezi, parallelogrammi, trapezi isosceli, rettangoli, rombi, quadrati: una partizione o qualcosa di diverso?
- 29/9 (1 ora 14-15 progr. 7). Relazioni d'ordine e insiemi ordinati o poset; l'ordine opposto o duale. Ordine stretto. Ordine totale o parziale, esempi: l'ordine alfabetico delle parole, l'inclusione fra sottoinsiemi di un insieme. Minimo e massimo di un sottoinsieme, buon ordine, assioma del buon ordine (cenni). Intervalli, ordine discreto, ordine denso, esempi. Maggioranti di un sottoinsieme non vuoto, estremo superiore, ordine completo.
- 30/9 (2 ore, 9-11 progr. 8). I. - Ordine totale continuo: insiemi separati, elementi separatori, continuità secondo Dedekind; equivalenza fra completezza e continuità per un ordine totale. Operazioni binarie interne in un insieme, alcune proprietà; monoidi; monoidi regolari; gruppi, gruppi abeliani, esempi. Relazioni d'equivalenza compatibili con un'operazione, operazione quoziente, proprietà che passano o no al quoziente, un esempio.

II. - L'ordinamento totale di ogni retta, le nozioni di semiretta e segmento, la densità. Insiemi convessi, esempi (rette, segmenti). Semipiani determinati da una retta r : definizione, proprietà richieste: la convessità; l'intersezione della retta r col segmento che congiunge punti sui semipiani opposti. Congruenza (o uguaglianza o isometria) di figure piane: proprietà desiderabili, classi di equivalenza di punti, rette, semirette, semipiani. Postulato del trasporto di un segmento nel tratto iniziale di una qualunque semiretta.

1/10 (2 ore, 9-11 progr. 10). I. - La congruenza di figure piane come ulteriore concetto primitivo. Segmenti consecutivi; segmenti adiacenti e loro somma. Postulato di compatibilità tra la somma di segmenti e la congruenza. Proprietà algebriche dell'addizione nell'insieme delle classi di congruenza dei segmenti. Sottrazione e confronto di segmenti. Ordinamento dei segmenti e sue proprietà, dapprima su una semiretta e poi fra le classi di congruenza. Ordinamento ed addizione di segmenti, proprietà che li collegano.
II. - Il monoide regolare ordinato delle classi di congruenza di segmenti. Multipli di un segmento, la proprietà di Archimede, con dimostrazione e commenti. Il gruppo simmetrico su un insieme; i gruppi di permutazioni e la loro azione sull'insieme: l'orbita di un elemento, azioni transitive.

6/10 (1 ora, 14-15 progr. 11). Sottomultipli di un segmento, esistenza del punto medio di un segmento. Angoli, possibili definizioni; angoli convessi come intersezione di semipiani; angoli concavi, angoli esplementari fra loro, angoli piatti; angoli nulli e angoli giro. Congruenza degli angoli piatti, degli angoli nulli e degli angoli giro. Proposta di redazione, da parte di ogni studente del corso, del testo di un esercizio di Geometria da usare come prova scritta per gli altri in sede d'esame.

7/10 (2 ore, 9-11 progr. 13). I. - Notazioni per gli angoli. Postulato del trasporto di angoli convessi e concavi. Angoli consecutivi ed adiacenti. Somma di angoli convessi consecutivi e compatibilità con la congruenza. Come rendere consecutivi angoli anche non convessi. Estensione della somma ad angoli qualsiasi: la somma come unione, il monoide commutativo con l'angolo giro come elemento assorbente; la somma "modulo l'angolo giro" ed il gruppo abeliano che si ottiene; l'angolo piatto ha periodo finito 2.
II. - Coincidenza delle due addizioni se l'unione dei due angoli è un sottoinsieme proprio del piano e legge di cancellazione. Applicazione agli angoli supplementari e a quelli opposti al vertice. Ordinamento degli angoli per inclusione, differenza di angoli, compatibilità con la congruenza e con la somma come unione, ma non con la somma modulo l'angolo giro. L'ordinamento degli angoli è totale, denso e continuo con minimo e massimo (en.) Esistenza della bisettrice di un angolo (en.), angoli retti, rette perpendicolari. Sottomultipli di un angolo, esistenza (en.). Asse di un segmento. Primi cenni alle costruzioni con riga e compasso.

8/10 (2 ore, 9-11 progr. 15). I. - Nozioni di base su circonferenza, cerchio, angoli al centro, archi e settori circolari affidati allo studio individuale. Poligonali: un tentativo di definizione, lati, vertici, assenza di lati sovrapposti o di lati adiacenti; poligonali chiuse; poligonali semplici o intrecciate. Poligono convesso come intersezione di semipiani determinati dai lati di una poligonale semplice chiusa opportuna. Angoli interni, poligono convesso come loro intersezione. Diagonali e loro conteggio. Poligoni regolari. Angoli esterni. Poligoni regolari. Congruenza di poligoni: definizione, postulato o teorema?
II. - Triangoli: definizione, discussione con gli allievi sulla classificazione rispetto ai lati. I criterio di congruenza come postulato. Applicazioni: proprietà

dei triangoli isosceli, caratterizzazione dell'asse di un segmento, il teorema dell'angolo esterno, angoli alterni interni ed esistenza della parallela da un punto ad una retta. Nuova formulazione del postulato delle parallele, l'inverso del teorema degli angoli alterni interni, la somma degli angoli interni di un triangolo.

13/10 (1 ora, 14-15 progr. 16). Esistenza ed unicità della perpendicolare da un punto ad una retta, dimostrata con e senza l'ausilio del postulato delle parallele. Geometria senza il postulato delle parallele: dal teorema dell'angolo esterno alla classificazione dei triangoli rispetto agli angoli; il secondo criterio di congruenza dei triangoli, nelle due varianti; il terzo criterio (senza dimostrazione); il criterio ulteriore per i triangoli rettangoli.

14/10 (Zore, 9-11 progr. 18). I. - Terminologia di uso corrente: "distanza" di due punti o di un punto da una retta in termini di classi di congruenza di segmenti. Caratterizzazione dei punti della bisettrice di un angolo convesso. Esistenza del circocentro e dell'incentro di un triangolo, le circonferenze circoscritta ed inscritta. Le tre altezze di un triangolo come assi di un triangolo opportuno ed esistenza dell'ortocentro con l'uso del postulato delle parallele. Mediane e baricentro (en.). Il caso dei triangoli isosceli ed equilateri: allineamento e coincidenza dei quattro punti. Cenni al teorema di Eulero sull'allineamento di baricentro, ortocentro e circocentro.

II. - Dialogo su altre proprietà dei triangoli: disequaglianze tra lati e tra gli angoli opposti; la disuguaglianza triangolare fra i lati. Quadrilateri nella geometria col postulato delle parallele (lezione dialogata): trapezi e proprietà dei loro angoli; trapezi isosceli e congruenza dei lati obliqui e delle diagonali; trapezi rettangoli; parallelogrammi e proprietà di lati opposti, angoli opposti diagonali che si bisecano, caratterizzazione come trapezi con basi congruenti. Rettangoli, rombi, quadrati e loro proprietà lasciati allo studio individuale.

15/10 (Zore, 9-11 progr. 20). I. - Poligoni convessi: caratteristiche generali, lati, diagonali, angoli interni e loro somma, con riflessioni sul significato di questa somma che supera l'angolo giro; angoli esterni e loro somma; ogni lato è minore della somma degli altri. Poligoni congruenti. Cambio di prospettiva: azione di un gruppo di permutazioni su un insieme, orbita e stabilizzatore di un oggetto, azioni transitive; prolungamento dell'azione ai sottoinsiemi.

II. - Gruppi di permutazioni sul piano: le affinità, che trasformano rette in rette; le similitudini, che trasformano angoli in angoli congruenti, e sono affinità; le isometrie, che trasformano segmenti in segmenti congruenti. Le isometrie formano un sottogruppo del gruppo simmetrico sul piano. Un esempio: le simmetrie assiali.

20/10 (1 ora, 14-15 progr. 21). Proprietà delle isometrie: portano triangoli in triangoli congruenti, rette in rette, angoli in angoli congruenti. Il gruppo delle isometrie agisce transitivamente sui punti, sulle rette, sulle semirette. Isometrie con due punti fissati e loro classificazione.

21/10 (2 ore, 9-11 progr. 23). I. - Transitività del gruppo delle isometrie sulla classe dei segmenti congruenti e su quella dei triangoli congruenti. Ogni isometria è prodotto di al più tre simmetrie. L'insieme delle simmetrie assiali come generatore del gruppo delle isometrie. Esercizi: transitività del gruppo sull'insieme degli angoli congruenti. Classi d'isometria e classi di congruenza di figure: un confronto ed una proposta d'identificazione.

II. - Circonferenze e rette tangenti, esterne e secanti. Poligoni circoscrittibili e loro caratterizzazione. Poligoni inscrittibili, caratterizzazione, apotema.

Poligoni regolari: definizione, angoli, congruenza; caratterizzazione dei poligoni regolari mediante le circonferenze inscritta e circoscritta concentriche.

22/10 (2 ore, 9-11, progr. 25). I. – Figure limitate, l'esempio dei poligoni convessi, unione di figure limitate. Generalizzazione della nozione di poligono: punti interni e di frontiera di una figura, insiemi aperti e loro chiusura, insiemi connessi (per archi); poligoni come chiusure di aperti connessi limitati, la cui frontiera è una poligonale semplice chiusa. Come definire gli angoli interni; l'esistenza di almeno un angolo interno convesso.

II. – Richiami sui sottogruppi di un gruppo: intersezione di sottogruppi, sottogruppo generato da un sottoinsieme; l'esempio dei sottogruppi ciclici; gruppi ciclici; generatori del gruppo simmetrico su n oggetti, cicli, trasposizioni; le simmetrie assiali generano il gruppo delle isometrie. Il monoide delle relazioni in un insieme rispetto alla composizione e all'identità. Potenze di una relazione; chiusura transitiva di una relazione; la relazione d'equivalenza generata da una relazione simmetrica, con un esercizio: la perpendicolarità fra rette.

27/10 (1 ora, 14-15 progr. 26). Somma di poligoni, possibili definizioni; non compatibilità con la congruenza; differenza di poligoni, poligoni "con buchi". Equiestensione di figure piane: definizione per assiomi; compatibilità con la congruenza e rispetto alla somma e alla differenza. Riduzione di ogni poligono ad un rettangolo equiesteso: parallelogrammi e rettangoli, triangoli e parallelogrammi.

28/10 (2 ore, 9-11 progr. 28). I. – Seminario di *Vanni* e *Guerreschi* sui teoremi di Euclide, Pitagora e piccolo di Talete: confronto fra le dimostrazioni riportate su vari libri di testo di scuola secondaria inferiore e superiore e libri esteri o antichi, con scambi di opinioni coi presenti sulle preferenze per l'una o l'altra impostazione.

II. – (Con l'ausilio di Geogebra). Brevissima presentazione di questo software. Uso di Geogebra per mostrare il procedimento che trasforma un poligono (convesso) in un triangolo. Uso del primo teorema di Euclide per mostrare che ogni rettangolo è equivalente ad un quadrato. Commenti sulle classi d'equivalenza di un punto e dell'intero piano e sulle figure delle quali non si sa nulla circa la classe d'equivalenza; cenni alla curva di Peano.

29/10 (2 ore, 9-11 progr. 30). I. – Riepilogo sulla teoria dell'equiestensione, i punti poco chiari, la classe del punto come elemento neutro della somma di figure. Esercizi: come trovare il quadrato equivalente alla somma di due quadrati, o il rettangolo di data altezza equivalente ad un dato quadrato. Triangoli con due coppie di lati congruenti, ma con gli angoli compresi non congruenti. Inverso del teorema di Pitagora e classificazione dei triangoli conoscendone i lati. Cenni alle terne pitagoriche.

II. – Esempi sulla chiusura transitiva di una relazione e la relazione d'equivalenza generata da una relazione simmetrica: la perpendicolarità fra rette, la conoscenza reciproca fra esseri umani. La rappresentazione di una relazione in un insieme finito tramite un grafo orientato e di una relazione simmetrica tramite un grafo non orientato (cenni). Relazione di copertura e relazione d'ordine stretto in un insieme finito, diagrammi di Hasse, con esempi. Un ordine denso ha relazione di copertura vuota.

3/11 (1 ora, 14-15 progr. 31). Ripresa di alcuni argomenti sui triangoli: l'angolo esterno come somma degli interni non adiacenti; rette incidenti ad un lato e

parallele ad un altro lato. Circonferenze tangenti internamente; retta con un punto interno ad un cerchio e intersezioni con la circonferenza.

- 4/11 (2 ore, 9-11 progr. 33). I. - Orientamento di una retta e delle rette parallele. Segmenti orientati. Segmenti equipollenti. Vettori come classi d'equipollenza di segmenti orientati. Isometrie con assi paralleli: le traslazioni, il vettore associato; la traslazione associata ad un vettore e gli infiniti modi di fattorizzarla nella composizione di due simmetrie con assi paralleli.
II. - Composizione di traslazioni e somma di vettori: compatibilità con l'equipollenza (en.), proprietà, il vettore nullo, vettori opposti. Il sottogruppo delle traslazioni ed gruppo additivo dei vettori del piano: loro isomorfismo, proprietà commutativa (en.). Ordine (o periodo) di una traslazione e di un vettore non nullo.
- 5/11 (2 ore, 9-11 progr. 35). I. - Seminario di *Iannuzzi e Rinaldi* sulla nozione di angolo nei testi delle scuole secondarie: definizioni, classificazioni, somma, disequaglianze, misura in gradi, angoli orientati; osservazioni su quest'ultima nozione e su una sua possibile formalizzazione.
II. - Prodotto di due simmetrie con assi incidenti: le rotazioni, il centro, l'angolo orientato. La rotazione di dati centro ed angolo orientato e gli infiniti modi di fattorizzarla come prodotto di due simmetrie con assi incidenti nel centro ed angolo metà dell'angolo della rotazione. Composizione di rotazioni con lo stesso centro e somma di angoli orientati. Il gruppo abeliano delle rotazioni con lo stesso centro. Le simmetrie centrali.
- 10/11 (1 ora, 14-15 progr. 36). Composizione di rotazioni con centri diversi e di rotazioni con traslazioni. Il gruppo dei movimenti. Il prodotto di un numero pari di simmetrie è un movimento. Prodotti di tre simmetrie, nei vari casi: le antitraslazioni.
- 11/11 (2 ore, 9-11 progr. 38). I. - Una tabella riassuntiva sulle isometrie piane, contenente i vari tipi di isometrie, il loro ordine, i punti e le rette fissati. Alcune proprietà del gruppo delle isometrie: il sottogruppo normale M dei movimenti ed il suo indice; il quoziente abeliano di M rispetto al gruppo delle traslazioni. La serie abeliana e la risolubilità del gruppo delle isometrie piane (cenni).
II. - Grandezze: monoidi commutativi ordinati; condizione per assicurare che il monoide sia regolare; monoidi regolari ordinati: elementi positivi e loro multipli. L'esempio del monoide additivo dei numeri naturali. La situazione più frequente, esemplificata dall'insieme dei segmenti: la relazione d'equivalenza, la relazione d'ordine parziale, l'addizione parziale; i due assiomi base, per ordinare totalmente il quoziente e trasformare l'operazione parziale in una operazione vera; gli assiomi per definire nel quoziente una struttura di monoide regolare ordinato. L'insieme quoziente così strutturato come insieme di grandezze "omogenee".
- 17/11 (1 ora, 14-15 progr. 39). Rapporto di grandezze omogenee non nulle: il caso del rapporto intero o reciproco di un intero; il caso del rapporto razionale, grandezze commensurabili. Grandezze incommensurabili e loro rapporto irrazionale. Cenni sulla costruzione dei numeri reali secondo Dedekind.
- 18/11 (2 ore, 9-11 progr. 41). I. - Seminario di *Di Tommaso, D'Orio e Mazzetti* sui gruppi di trasformazioni geometriche: isometrie, similitudini ed affinità nei testi di scuola secondaria: definizioni, le traslazioni e i vettori, angoli e rotazioni di dato verso, simmetrie centrali, simmetrie assiali, trasformazioni

involutorie. Omotetie; similitudini come composizioni di isometrie e omotetie, figure simili, rapporto di similitudine. Invarianti di una trasformazione e le diverse geometrie.

II. - Misura di una grandezza rispetto ad una fissata unità di misura. Cenni sulla misura come isomorfismo additivo e d'ordine tra l'insieme delle grandezze e la struttura additiva ordinata dei numeri reali "assoluti" (= non negativi). Rapporto di grandezze e rapporto delle loro misure. Poligoni come classi di grandezze. Le aree come misura dei poligoni rispetto al quadrato unitario. Area di un rettangolo note le misure dei lati.

19/11 (2 ore, 9-11 progr. 43). I. - Seminario di *Abbondanza, Cavrini, Sirotti* sulle nozioni di punto, retta e piano nei testi di scuola primaria e secondaria; i modelli, gli assiomi, le applicazioni, gli esercizi proposti. Breve dialogo con i presenti a commento del seminario.

II. - Formule note per le aree. Poligoni circoscrittibili. Poligoni regolari, apotema, area. Proporzioni fra coppie di grandezze omogenee. I segmenti di una retta come insieme di grandezze. Il teorema di Talete ed il suo inverso. Figure simili, i possibili approcci per assiomi o con le similitudini; poligoni simili. Criteri di similitudine per i triangoli, dimostrazione del primo criterio.

24/11 (1 ora, 14-15 progr. 44). Seminario di *Cagnacci e Tonti* sul parallelismo nei testi dei vari ordini scolastici: definizioni di parallele, la distanza fra di esse, il V postulato di Euclide, le proprietà degli angoli alterni, corrispondenti e coniugati formati con una trasversale; le geometrie non euclidee e la loro collocazione; considerazioni sull'opportunità di trattarle o no.

25/11 (2 ore, 9-11 progr. 46). I.- Seminario di *Ignatti e Ribisi* su circonferenza e cerchio nei testi dei vari ordini scolastici: definizioni, archi, corde e diametri, angoli al centro ed alla circonferenza, mutue posizioni fra rette e circonferenze o fra due circonferenze; le tangenti ad una circonferenza. Osservazioni sull'importanza di una buona impaginazione dei contenuti e dell'uso dei colori per aiutare gli allievi nello studio.

II. - Seminario di *Cocchi, Gamberi e Guidi* sulla Geometria dello spazio: assiomi, mutue posizioni di rette e piani, parallelismo, diedri, angoli e perpendicolarità fra rette e fra piani, nei testi della scuola secondaria e su Internet. Osservazioni sull'importanza di un indice ben fatto e della presenza di esercizi significativi a corredo della teoria.

26/11 (2 ore, 9-11 progr. 48). I. - Seminario di *Farneti e Riggi* sulla congruenza nei testi della scuola secondaria di I e II grado: nozione di figure congruenti, i tre criteri di congruenza dei triangoli; in particolare, esame comparativo tra un testo solo cartaceo ed uno multimediale.

II. - Circonferenza e cerchio come elementi di separazione fra perimetri ed aree di poligoni regolari inscritti e circoscritti. Proporzionalità diretta tra diametri delle circonferenze e perimetri dei poligoni regolari inscritti al variare del raggio; rapporto costante fra circonferenza e diametro e fra cerchio e quadrato del raggio, il numero π .

1/12 (1 ora, 14-15 progr. 49). (con Power Point). Gli assiomi di Hilbert per la geometria euclidea del piano e dello spazio: i tre termini primitivi e le tre relazioni primitive; i cinque insiemi di postulati, con commenti vari sulle definizioni di segmento, semiretta, angolo, triangolo, completezza, e confronti tra formulazioni diverse su testi diversi.

- 2/12 (2 ore, 9-11 progr. 51). I - Seminario di *D'Acunzo, Tartarini e Veronesi* sul teorema di Talete e le similitudini nei testi di scuola secondaria: grandezze proporzionali e teorema di Talete, figure simili, omotetie, rapporto di similitudine, criteri di similitudine per triangoli, rapporto fra le aree ed i quadrati dei lati. I teoremi di Euclide introdotti mediante le similitudini. Uso di filmati e sussidii tratti da Internet sul teorema di Talete.
- II. - Seminario di *Rossi e Vertova* su luoghi geometrici e coniche in vari testi della scuola secondaria: la nozione di luogo geometrico, gli esempi base: asse di un segmento, bisettrice, circonferenza, ellisse, iperbole, parabola e loro traduzioni analitiche; confronto tra pregi e difetti dei testi analizzati sulla base delle loro scelte didattiche; breve commento sulla definizione di luogo geometrico.
- 3/12 (2 ore, 9-11 progr. 53). I. - Seminario di *Lorini e Rossetti* sui poliedri nei testi della scuola secondaria: definizioni, tipi di poliedri, relazione di Eulero tra facce, vertici e spigoli; prismi e piramidi: superficie laterale e totale, volume, principio di Cavalieri; poliedri regolari.
- II. - Seminario di *Garaffoni e Paolizzi* sui solidi di rotazione nei testi di scuola secondaria: definizioni, superficie laterale e totale, volume (con l'uso della lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio e del principio di Cavalieri). Cenni sulle sezioni coniche. Fine del corso.